Processamento Digital de Sinais - Transformada Discreta de Fourier

Edmar Candeia Gurjão

Universidade Federal de Campina Grande

3 de Novembro 2017

- Lembrando que se $x[n]$ é um sinal no tempo de discreto e aperiódico, sua Transformada de Fourier é dada por

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

e a inversa

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

- $X(e^{j\omega})$ é uma função contínua de ω.
- Exemplo: Seja o sinal

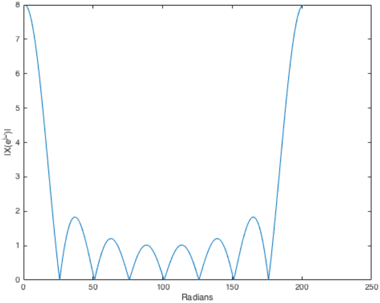
$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < L \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

- Ou seja, um sinal limitado no tempo com apenas L valores não nulos.

- Calculando a Transformada de Fourier para $L = 8$ obtemos

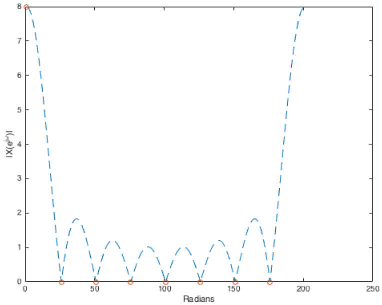
$$X(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j8\omega} - 1}{e^{-j\omega} - 1}$$

cujo módulo está representado na Figura abaixo



- Que é uma função contínua de ω, e para realizar a análise espectral usando um processador digital, deve amostrá-la.

- Por exemplo, se escolhermos $N = 8$ amostras obteremos a representação abaixo



- A sequência de N valores é a DFT do sinal.
- Mapeamento do sinal no tempo discreto para o espectro discreto.

- Então $X[k] = X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}}, \;\; k = 0, 1, 2, ..., N-1$
- Como $X(e^{j\omega})$ é periódica, basta amostrar um período de 2π.
- $x(n)$ tem comprimento L ($x[n] = 0$ para $n < 0$ e $N \geq L$) temos

$$X[k] = X(e^{j\frac{2\pi k}{N}}) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$

ou ainda como

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} & k = 0, 1, ..., N-1 \\ 0, & c.c \end{cases}$$

e

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, & n = 0, 1, ..., N-1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

sendo $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$.

- Observe que na equação inversa $n = 0, ..., N - 1$, e que os demais valores de $x(n)$ devem ser zero.
- Entretanto na inversa aparece W_N que é uma função periódica com período N, logo a sequência recuperada no tempo discreta será periódica com período N, por isso é necessário limitá-la nos primeiros N pontos.
- Outro fator a se destacar é que originalmente o sinal $x(n)$ tem L valores e na definição de $X(k)$ foi utilizada a variável N que pode ser diferente de L.

- O parâmetro N é o passo que a função $H(e^{j\omega})$ será amostrada, ou seja, como o intervalo 2π será dividida $(2\pi/N)$;
- Ao aplicar a transformada inversa em $X(k)$ se obtém um sinal $\hat{x}(n)$ que é periódico cujos valores se repetem a cada N;
- Dessa forma, ao fazer $N > L$, o que implica em tomar além dos L primeiros valores de $x(n)$ outros $N - L$ valores que são zero na equação

$$X[k] = X(e^{j\frac{2\pi k}{N}}) = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$

melhorará a representação espectral, pois os intervalos $2\pi/N$ serão menores e assim mais detalhes serão tomados, além do que no tempo as cópias de $x(n)$ em $\hat{x}(n)$ estarão mais espaçadas.

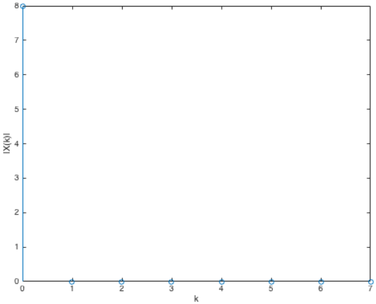
- O fato de utilizar valores $x(n) = 0$, $L \leq n \leq N - 1$ no somatório da Equação acima não contribuirá com novos valores, porém fará com que os valores não nulos quando $0 \leq n \leq< L - 1$ seja ponderados por exponenciais $e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ menos a medida que N aumenta, modificando assim o valor final de $X(k)$.
- Assim aumentar o valor de N não traz problema para a representação espectral de $x(n)$, porém implica em mais processamento.

- Na frequência
  - Exemplo: Voltemos ao sinal

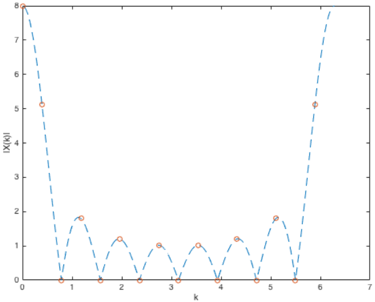
$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, ..., L \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

tem-se

$$X[k] = \sum_{n=0}^{7} e^{-j(\frac{2\pi k}{8})n} = \frac{e^{-j2\pi k} - 1}{e^{-j(2\pi k/8)} - 1} = \begin{cases} 8, & k = 0, \pm 8, \pm 16, ... \\ 0, c.c \end{cases}$$



- Observe que vários valores não foram registrados.
- Fazendo $N = 16$: $X[k] = \sum_{n=0}^{15} e^{-j(\frac{2\pi 8k}{16})n} = \frac{e^{-j2\pi k}-1}{e^{-j(2\pi k/16)-1}}$



- O que acontece se aumentarmos para $N = 32, 64, 128$?

- Na frequência
  - Vamos observar o caminho inverso, dado um $X(k)$ qual $x(n)$ é obtido pela transformada inversa?
  - Tomemos $X(k)$ para sinal retangular dos exemplos anteriores com $L = 8$ e $N = 8$.
  - Aplicando a transformada inversa obtemos

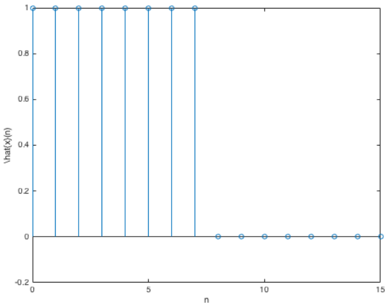
$$\hat{x}(n) = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{8}.8 = 1.$$

  - O sinal recuperado $\hat{x}(n)$ é periódico. Porém como $x(n) = \hat{x}(n)$, $0 \leq n < L$ obtem-se o sinal original.

- Fazendo o mesmo para $N = 16$ chega-se a

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{15} X(k)e^{j\frac{2\pi}{16}kn}$$

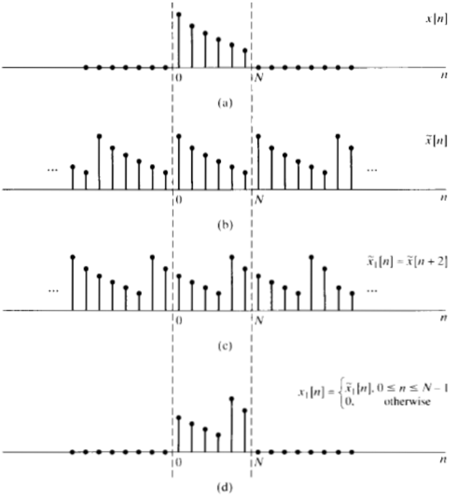
cujo sinal está representado na Figura abaixo.



- Que também é periódico, agora com período $N = 16$, do qual se obtém $x(n)$ ao tomar os $L = 8$ primeiros valores.

- Deslocamento Circular de uma sequência
  - Se $X(e^{j\omega})$ é a Transforma de Fourier no Tempo Discreto de $x[n]$, então $e^{-j\omega n}X(e^{j\omega n})$ é a Transformada de Fourier de $x[n-m]$.
  - Entretanto, definimos a Transformada Discreta de Fourier $X[k]$ para um sequência finita, logo não faz sentido em falar que $e^{-j\frac{2\pi k}{N}m}X[k]$ não pode ser Transformada de $x[n]$ deslocada, pois o resultado tem que ser de tamanho N.
  - Nesse caso, o deslocamento é circular, ou seja, obtém-se o sinal $x_1[n] = x[(n-m) \mod N]$

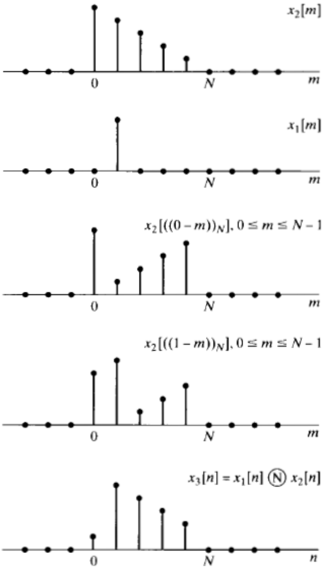
- Deslocamento Circular de uma sequência



- Convolução Circular
  - Da mesma forma que ocorre o deslocamento circular, a convolução de $x_1[n]$ com $x_2[n]$ para obter $x_3[n]$, na frequência dada por $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$ é circular, e dada por

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[(n-m) \mod N]$$

  - Exemplo: $x_1[n] = \delta[n - n_0]$, e sinal mostrado abaixo


$x_2[m]$
0
N
m
$x_1[m]$
0
N
m
$x_2[((0-m))_N],\ 0 \leq m \leq N-1$
0
N
m
$x_2[((1-m))_N],\ 0 \leq m \leq N-1$
0
N
m
$x_3[n] = x_1[n]$ (N) $x_2[n]$
0
N
n

- Convolação Linear Usando a Transformada Discreta de Fourier.
  - Pode se implementada fazendo:
    1. Calcular a DFT de N pontos $X_1[k]$ e $X_2[k]$ das seuqências $x_1(n)$ e $x_2(n)$.
    2. Calcular o produto $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$ para $0 \leq k \leq N - 1$.
    3. Calcule a DFT inversa de $X_3[k]$ para obter $x_3[n]$.
  - A questão é como garantir que a convolução circular tem o mesmo efeito da convolução linear.

- Convolução Linear Usando a Transformada Discreta de Fourier.
  - O processo de amostrar na frequência implica que a sequência no tempo é periódica;
  - Logo, o procedimento para obter a convolução baseado na transformada de duas sequências para o domínio da frequência, multiplicar e depois realizar a transformada inversa resulta numa convolução circular;
  - Filtragem é um processo de convolução linear, como obté-la de um convolução circular.

- Convolução Linear Usando a Transformada Discreta de Fourier.
  - Voltemos a expressão da convolução circular entre $x(n)$ e $h(n)$, dada por

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k)h(n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k) + \sum_{l=n+1}^{N-1} x(k)h(n-k+N),\ 0 \le n \le N \end{aligned}$$

  - Para obter a convolução linear devemos zerar o segundo termo do somatório, ou seja,

$$\sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k) + \sum_{k=n+1}^{N-1} x(k)h(n-k+N) = 0,\ 0 \le n \le N-1.$$

- Convolução Linear Usando a Transformada Discreta de Fourier.
  - Assumindo que $x(n)$ tem compimento L e $h(n)$ tem comprimento M, para que a soma anterior seja nula um dos dois deve ser zero no intervalo do somatório, isto é

$$x(n) = 0,\ \ n > L - 1 \ e \ h(n) = 0,\ \ n > M - 1.$$

então

$$\sum_{k=n+1}^{N-1} x(k)h(n-k+N) = 0,\ 0 \leq n \leq N-1.$$

quando $k \geq L$, pois nesses casos $x(k) = 0$ ou $n - k + N \geq M$, pois $h(n-k+N) = 0$. Juntando as condições

$$k \geq L \ e \ n - k + N \geq M$$

e como $0 \leq n \leq N-1$, quando $n = 0$ chega-se a condição

$$N \geq M + L - 1$$

- Convolução Linear Usando a Transformada Discreta de Fourier.
  - A condição

$$N \geq M + L - 1$$

    implica em completar:
    - $x(n)$ com $M - 1$ zeros;
    - $h(n)$ com $L - 1$ zeros.

- Convolução Linear Usando a Transformada Discreta de Fourier.
  - Sejam $x(n) = \{1.1, 0.9, 1.1, 0.9\}$, $L = 4$ e $h(n) = \{0.5, -0.5\}$, $M = 2$. Escolhendo $N = 3$:
  - $y(n) = \sum_{m=0}^{3} x(m)h[(n-m) \mod 3]$

$$\begin{aligned}
y(0) &= \sum_{m=0}^{3} x(m)h(-m\ mod\ 3) = x(0)h(0) + x(1)h(3) + x(2)h(2) + \\
y(1) &= \sum_{m=0}^{3} x(m)k((1-m)mod\ 3) = x(0)h(1) + x(1)h(0) \\
y(2) &= \sum_{m=0}^{3} x(m)k((2-m)mod\ 3) = x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0 \\
y(3) &= \sum_{m=0}^{3} x(m)k((3-m)mod\ 3) = x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0
\end{aligned}$$

- Convolução Linear Usando a Transformada Discreta de Fourier.
  - Sejam $x(n) = \{1.1, 0.9, 1.1, 0.9\}$, $L = 3$ e $h(n) = \{0.5, -0.5\}$, $M = 2$.
  - Nesse caso $N \geq 3 + 2 - 1 \geq 4$. Escolheremos $N = 4$ logo $x(n) = \{1.1, 0.9, 1.1, 0.9, 0\}$, $h(n) = \{0.5, 0.5, 0, 0\}$
  - Temos $y(n) = \sum_{k=0}^{3} x(k)h(n-k)$:

$$
\begin{aligned}
y(0) &= \sum_{k=0}^{3} x(k)k(-k) = x(0)h(0) + x(1)h(-1) + x(2)h(-2) + x(3)h \\
&= x(0)h(0) = 0.55. \\
y(1) &= \sum_{k=0}^{3} x(k)k(1-k) = x(0)h(1) + x(1)h(0) + x(2)h(-1) + x(3) \\
&= x(0)h(1) + x(1)h(0) = 1.
\end{aligned}
$$

- Vimos que para obter a convolução linear de dois sinais $x(n)$ de comprimento M e $h(n)$ de comprimento L no tempo discreto temos que fazê-los ter comprimento $N = M + L - 1$.
- Convolução é normalmente utilizadas para filtragem, então um dos sinais tem comprimento finito;
- Entretanto, o outro sinal pode ter omprimento infinito é necessário particioná-la em blocos para para realizar a convolução.
- Consideremos que $x(n)$ tem comrpimento muito grande comparado com $h(n)$, então podemos particionar fazendo

$$x_m(n) = \begin{cases} X(n - mM_0) & para\ 0 \leq n \leq M - 1\ e\ m = 0, 1, 2, 3, ... \\ 0, & c.c \end{cases}$$

- Dessa forma fazendo $N = M_0 + L - 1$ tem-se

$$y_m(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_m(k)h(n-k),\ \ para\ 0 \leq n \leq N-1$$

como a convolução do m bloco de $x(n)$ com $h(n)$.

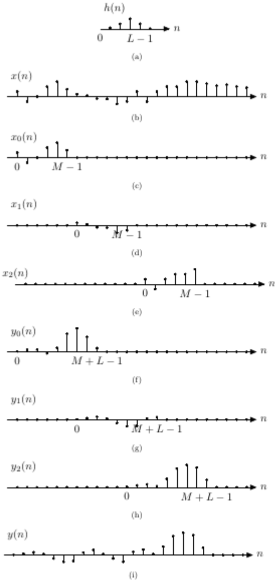
- A sequência de entrada pode ser escrita como

$$x(n) = \sum_{m}^{\infty} x_m(n - mM_0)$$

e pelo princípio da sobreposição

$$y(n) = \sum_{m}^{\infty} y_m(n - mM_0)$$

- Como $N = M + L - 1 > M$ então haverá sobreposições dos sucessivos $y_m(n)$, essa sobreposições precisam ser somadas, dai surge o método overlapp and add.


$h(n)$
n
0
$L-1$
(a)
$x(n)$
n
(b)
$x_0(n)$
n
0
$M-1$
(c)
$x_1(n)$
n
0
$M-1$
(d)
$x_2(n)$
n
0
$M-1$
(e)
$y_0(n)$
n
0
$M+L-1$
(f)
$y_1(n)$
n
0
$M+L-1$
(g)
$y_2(n)$
n
0
$M+L-1$
(h)
$y(n)$
n
(i)

- **Exercício:** Seja o sinal

$$x[n] = \cos(2\pi n/21)$$

que é adicionado a interferência

$$\eta[n] = 0,2 * (-1)^n \delta[n]$$

produzindo $r[n] = x[n] + \eta[n]$.

- Faça a convolução de $r[n]$ com o filtro $h[n] = \frac{1}{2}\delta[0] + \frac{1}{2}\delta[1]$, e desenhe em um mesmo gráfico $r[n]$ e o resultado da convolução.

- Janelamento
  - Devemos lembrar que realizamos a DFT de um sinal limitado no tempo, que por sua vez pode ser representado por

$$x_N[n] = x[n]\{u[n] - u[n-N]\}$$

  - Chamaremos a função $w[n] = u[n] - u[n-N]$ de janela.
  - Logo a DFT de $x[n]$ será uma convlução de $x[k]$ com a $W[k]$.
  - Exemplo: sendo $x[n] = cos(\frac{2*\pi n}{16})$ esperamos que seja composto de dois impulsos.
  - Lembrando do efeito da convolução, observamos um espectro "espalhado", o que chamamos de DFT *leakage* (vazamento).

- FFT e Janelamento
  - A escolha da janela $w[n]$ é a operação chamada de **janelamento**, e influencia diretamente no resultado da DFT.
  - Alguns tipos de Janelas:
    - Retangular: $w[n] = 1, \; n = 0, 1, 2, ..., N - 1$
    - Hanning $w[n] = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), \; n = 0, 1, 2, ..., N - 1$
    - Hamming $w[n] = 0.54 - 0.46 * \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), \; n = 1, 2, ..., N - 1$