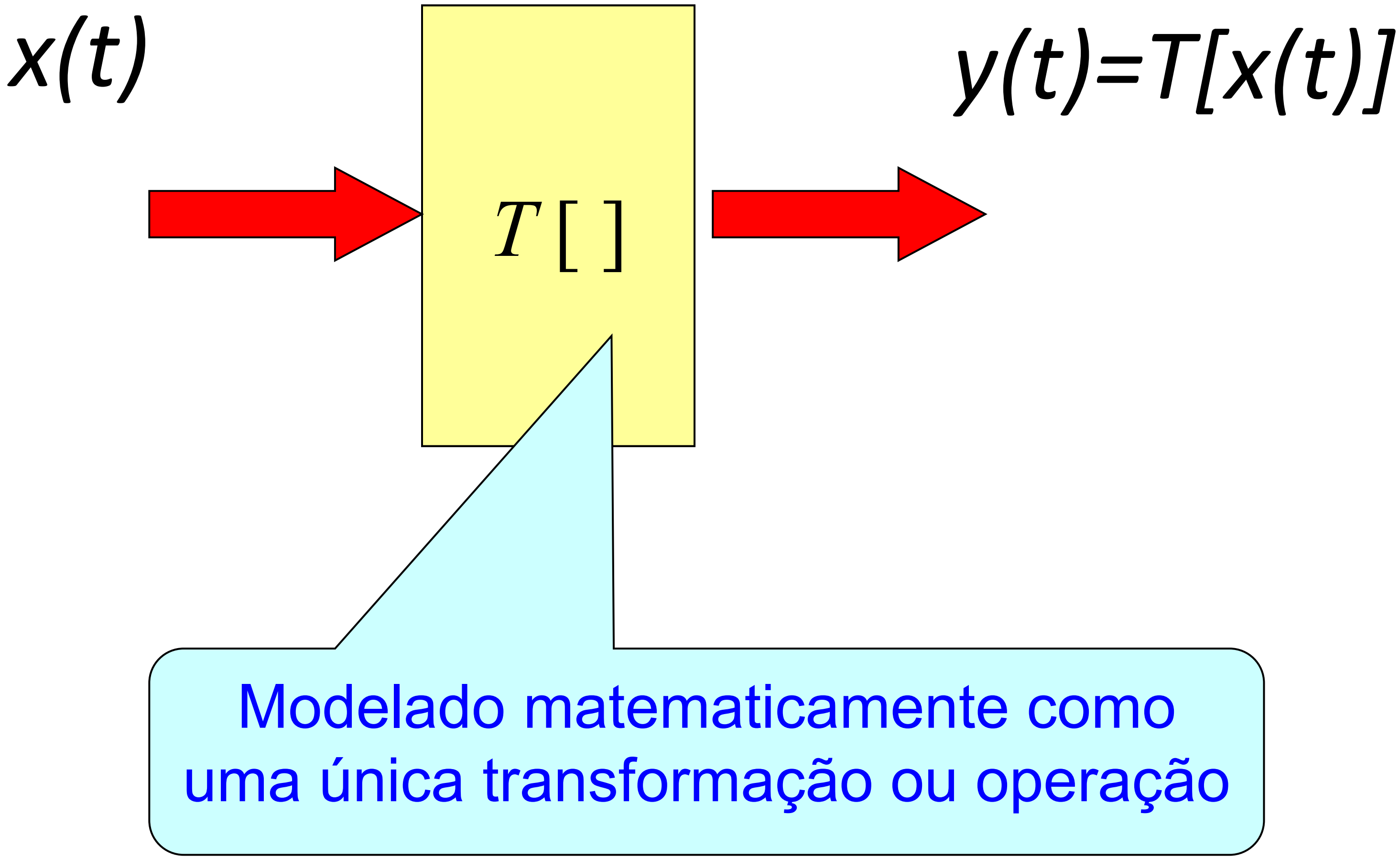
Universidade Federal de Campina Grande
Departamento de Engenharia Elétrica

Análise de Sinais e Sistemas
Aula: Sistemas lineares invariantes no tempo

Luciana R. Veloso

luciana.veloso@dee.ufcg.edu.br

SISTEMAS


$x(t)$
$T[\,]$
$y(t)=T[x(t)]$
Modelado matematicamente como
uma única transformação ou operação

SISTEMAS LINEARES

- Um sistema é dito linear se obedece ao Princípio da Superposição:

  Dado: $y_1(t) = T[x_1(t)]$ $\qquad$ $y_2(t) = T[x_2(t)]$

  – **Aditividade:**

  $$T[x_1(t) + x_2(t)] = T[x_1(t)] + T[x_2(t)] = y_1(t) + y_2(t)$$

  – **Homogeneidade:**

  $$T[ax_1(t)] = aT[x_1(t)] = ay_1(t)$$

$$\boxed{T[ax_1(t) + bx_2(t)] = aT[x_1(t)] + bT[x_2(t)] = ay_1(t) + by_2(t)}$$

Sistemas Invariantes no Tempo

- O comportamento e as características do sistema não dependem do tempo.
- Um deslocamento no tempo de t_0 no sinal de entrada resulta num deslocamento no tempo de t_0 na saída

Se: $$y(t) = T[x(t)]$$

Então: $$\boxed{y(t - t_0) = T[x(t - t_0)]}$$

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

- Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo (*LTI - Linear and Time-invariant Systems*)
  - Utilizados para modelar sistemas físicos
  - Fáceis de analisar em virtude da propriedade da linearidade
  - Fornecem um conjunto de ferramentas poderosas que formam a base da análise de sinais e sistemas

REPRESENTAÇÃO DE SINAIS DE TEMPO CONTÍNUO EM TERMOS DE IMPULSOS

- Propriedade seletiva de impulso de tempo contínuo

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau}$$

RESPOSTA DE UM SISTEMA LTI AO IMPULSO UNITÁRIO

Define-se *h(t)*, como a resposta ao impulso unitário, quando este é aplicado na entrada de um sistema LTI.

Sistema LTI

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{T[\;]} \longrightarrow \boxed{h(t) = T[\delta(t)]}$$

Devido a propriedade da invariância no tempo, tem se:

$$\boxed{h(t-t_0) = T[\delta(t-t_0)]}$$

A INTEGRAL DE CONVOLUÇÃO

- A resposta do Sistema LTI a qualquer entrada pode ser determinada por:

$$y(t) = T[x(t)]$$

- Utilizando a propriedade seletiva de impulso de tempo contínuo

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = T[x(t)] \qquad\qquad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = T[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau], \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)T[\delta(t-\tau)]d\tau$$

Como

$$h(t-\tau) = T[\delta(t-\tau)]$$

Então

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}$$

Integral de convolução

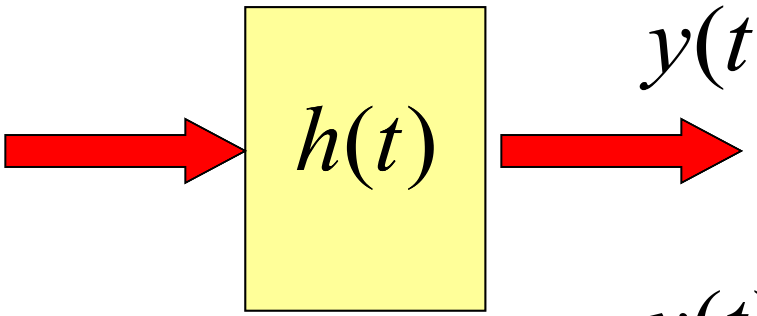
CONVOLUÇÃO

A convolução entre $x(t)$ e $z(t)$

$$\boxed{x(t) * z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) z(t-\tau) d\tau}$$

SISTEMAS LTI

$x(t)$



$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- Qualquer sistema LTI é completamente caracterizado pela sua resposta ao impulso unitário

Exemplo 1

- Determinar a resposta do sistema quando

$$x(t) = e^{-at}u(t), a > 0$$

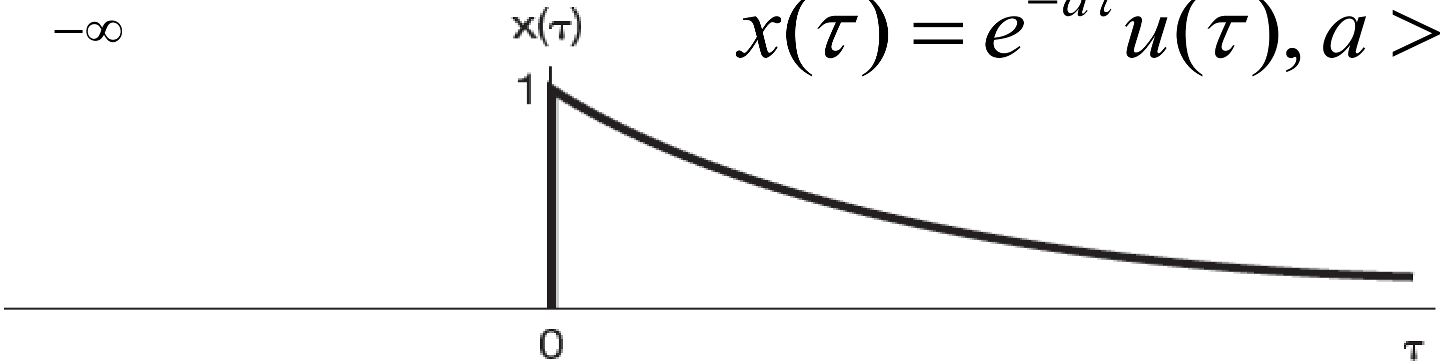
$$h(t) = u(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

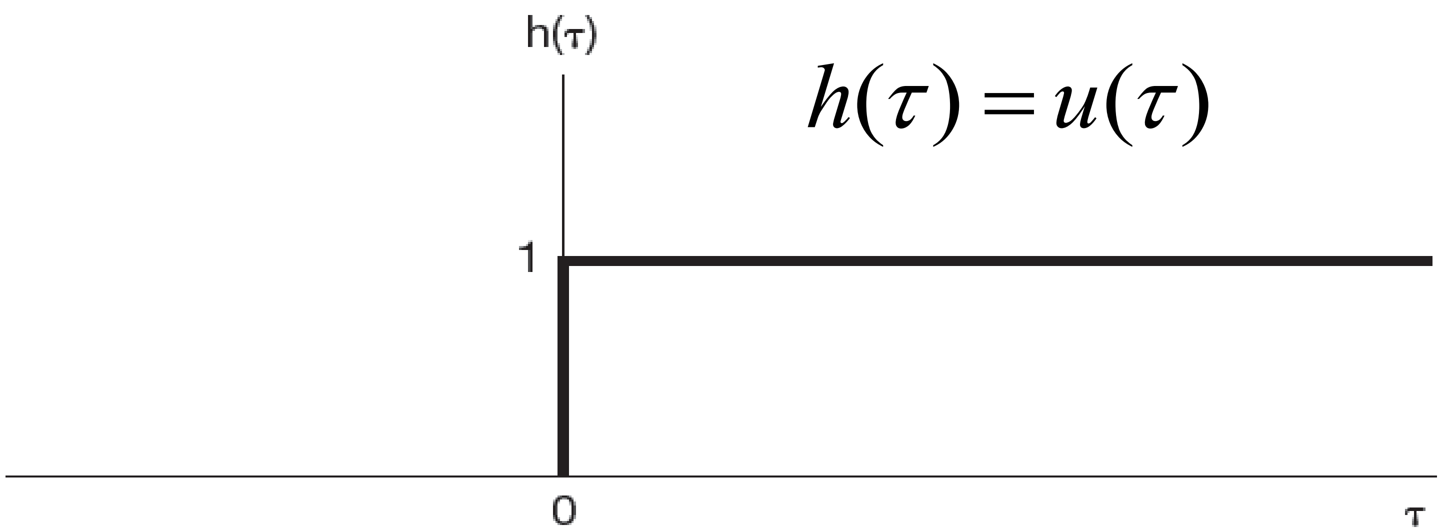
Interpretação gráfica da convolução

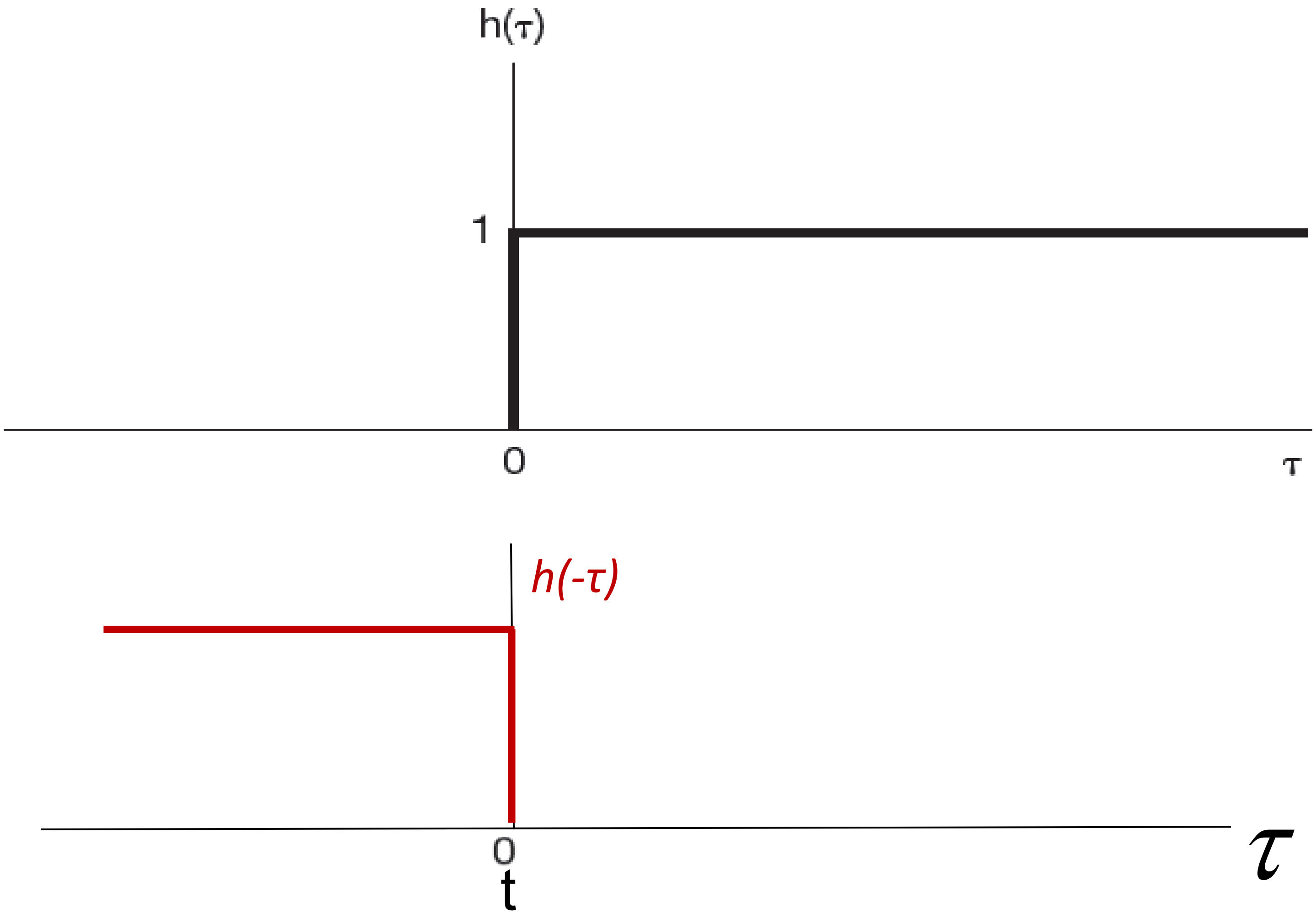
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

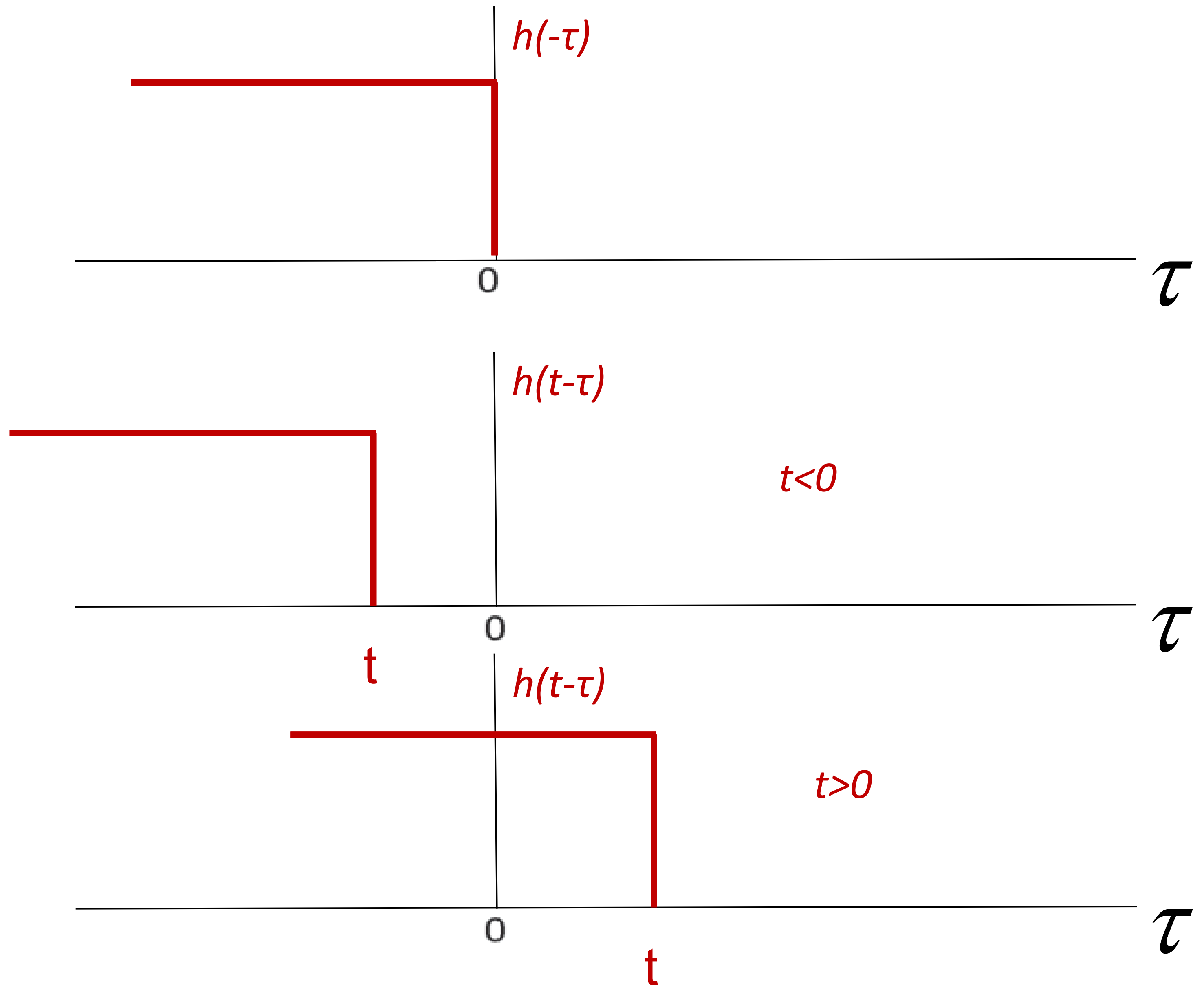
$$x(\tau) = e^{-a\tau}u(\tau), a > 0$$



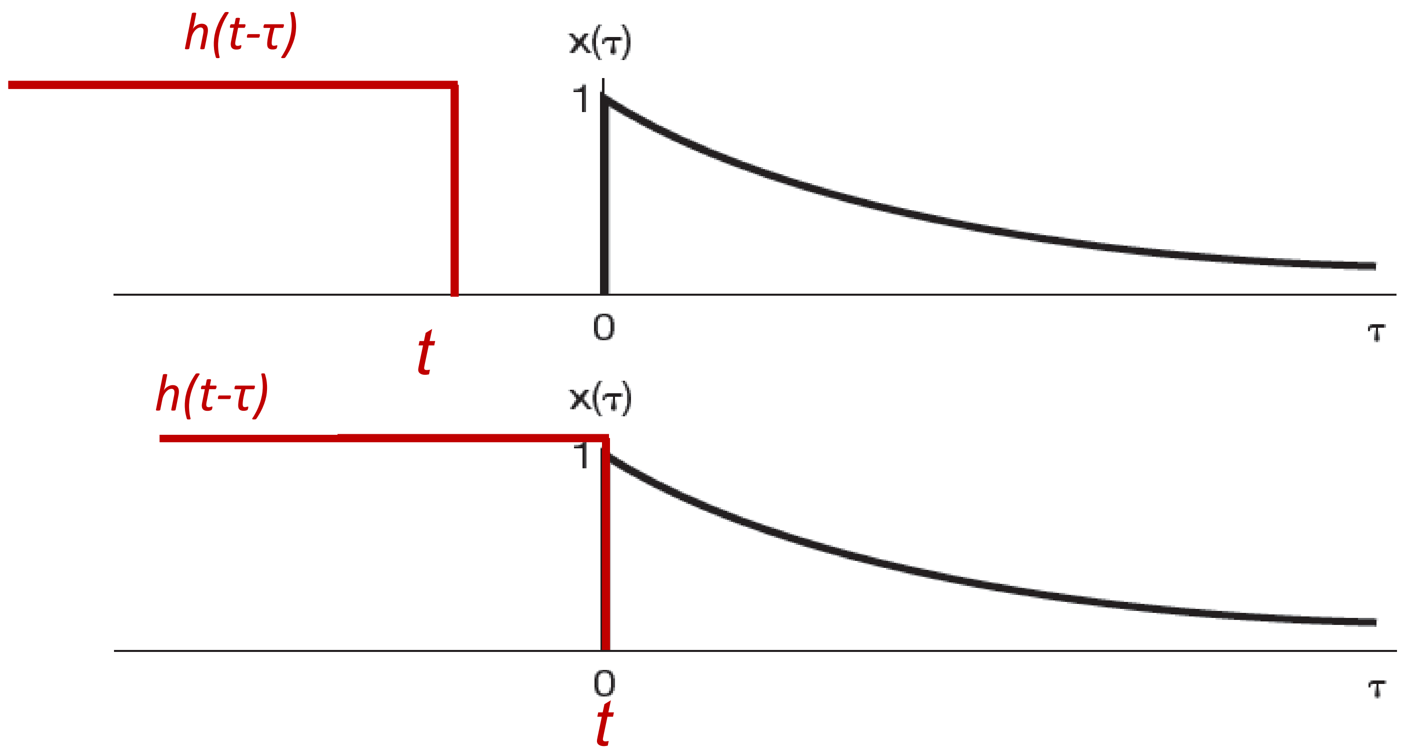
$$h(\tau) = u(\tau)$$




h(τ)
1
0
τ
h(-τ)
0
t
τ

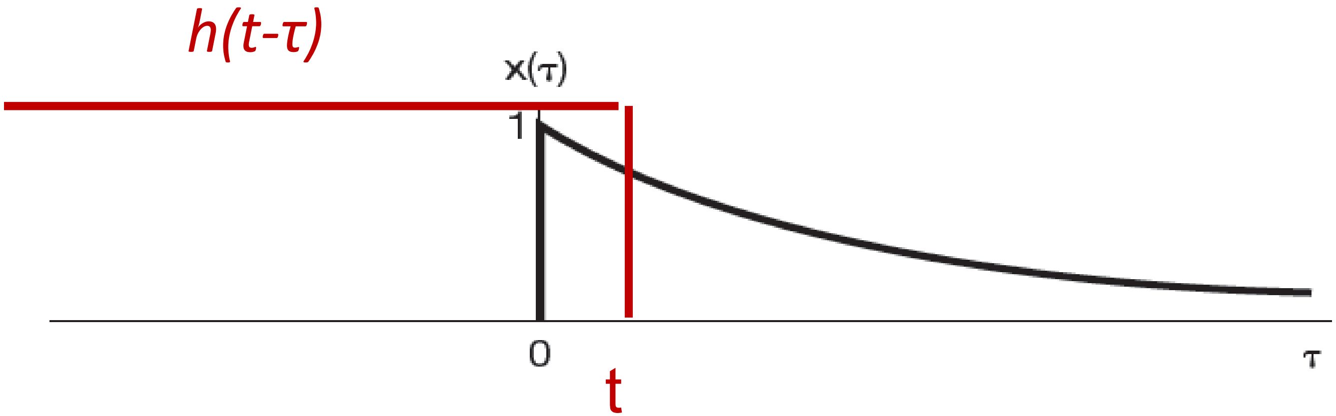

h(-τ)
0
τ
h(t-τ)
t<0
0
t
τ
h(t-τ)
t>0
0
t
τ

Para $t \leq 0$



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 0$$

Para t ≥ 0



$$y(t)=\int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_0^t e^{-a\tau}u(\tau)d\tau$$

$$y(t)=\int_0^t e^{-a\tau}d\tau=\frac{1}{-a}e^{-a\tau}\Big|_0^t=-\frac{1}{a}(e^{-at}-1)$$

$$y(t)=\frac{1}{a}(1-e^{-at})$$

$$x(t) = e^{-at}u(t), a > 0$$

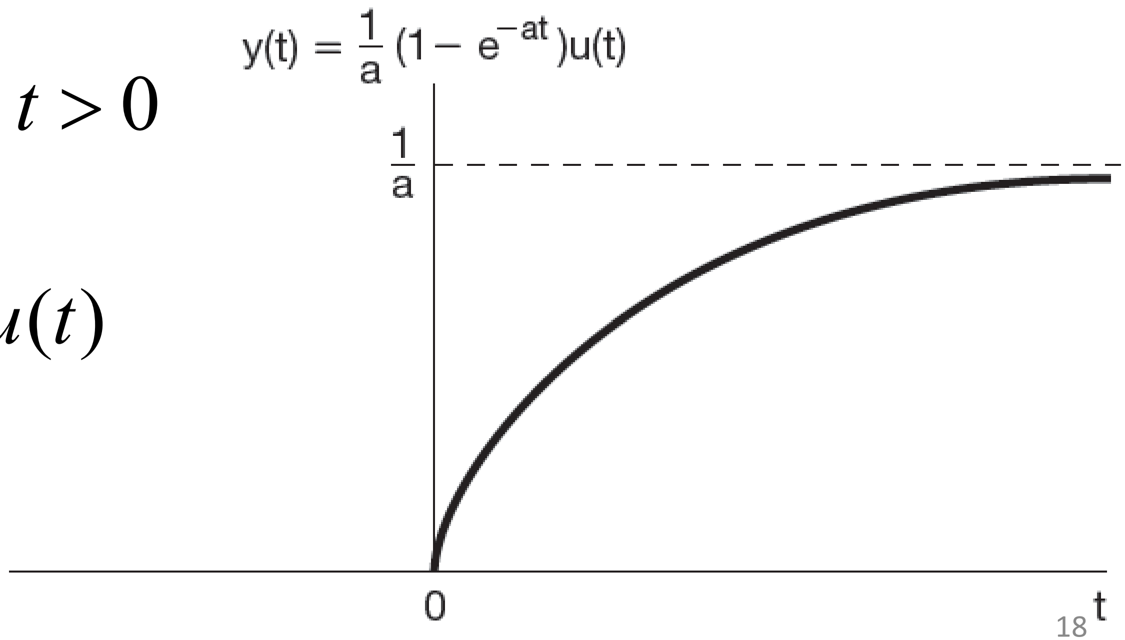
$$h(t) = u(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$y(t) = 0, t \le 0$$

$$y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at}), t > 0$$

$$y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t)$$



Exemplo 2

$$x(t) = \begin{cases} 1, 0 < t < T \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} t, 0 < t < 2T \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

Interpretação gráfica da convolução

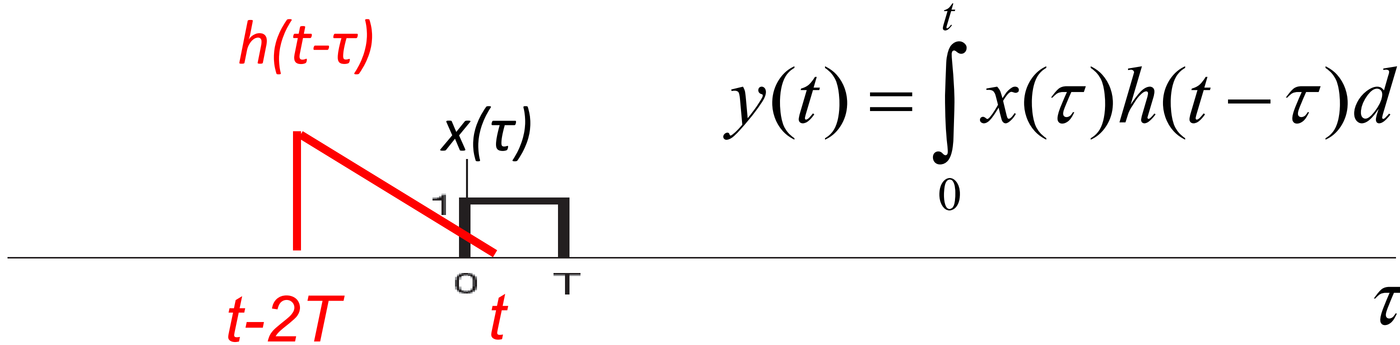
$$x(\tau) = \begin{cases} 1, 0 < \tau < T \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases} \qquad h(\tau) = \begin{cases} \tau, 0 < \tau < 2T \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

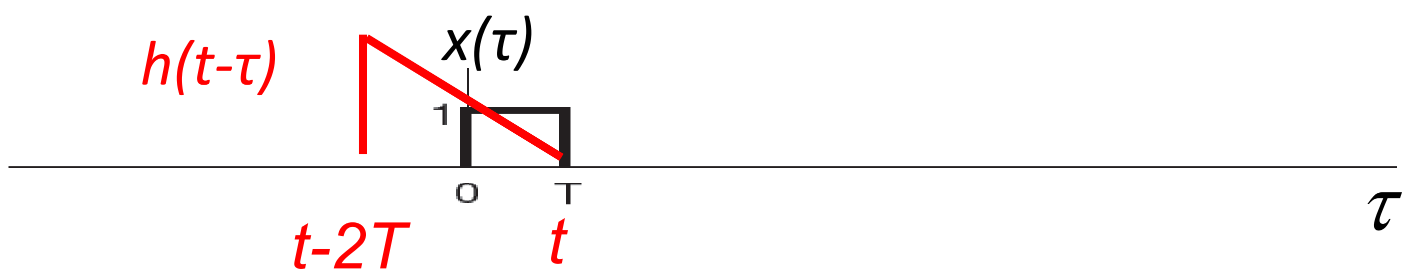
Para t ≤0

$$y(t) = x(t) * h(t) = 0$$

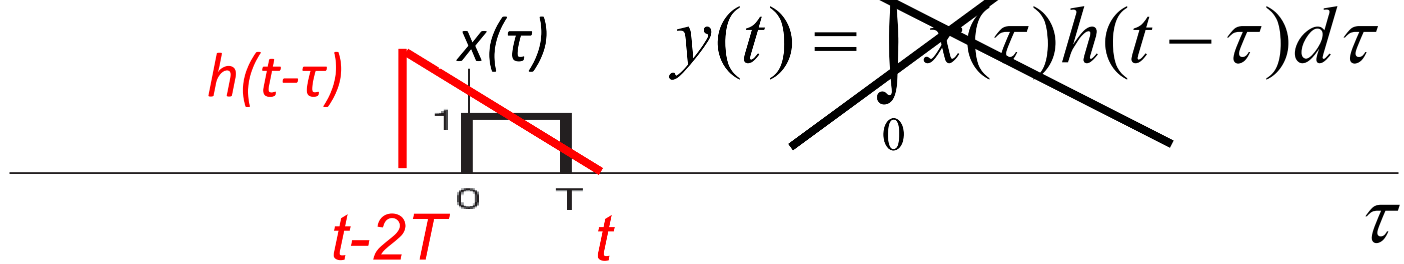
Para 0< t ≤T

$$y(t)=\int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

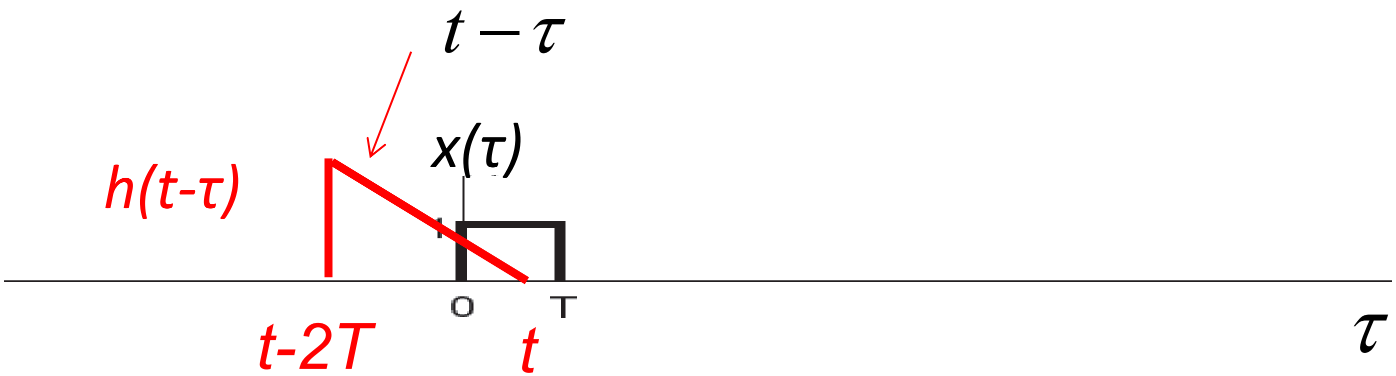




$$y(t)=\cancel{\int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau}$$



Para 0< t ≤T



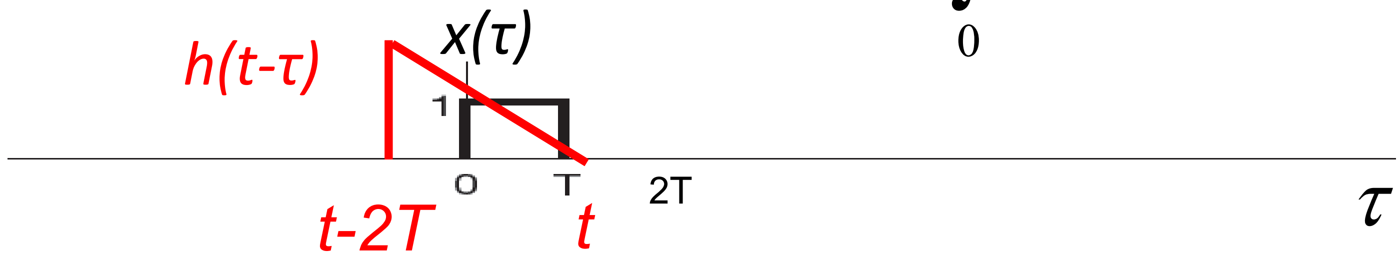
$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

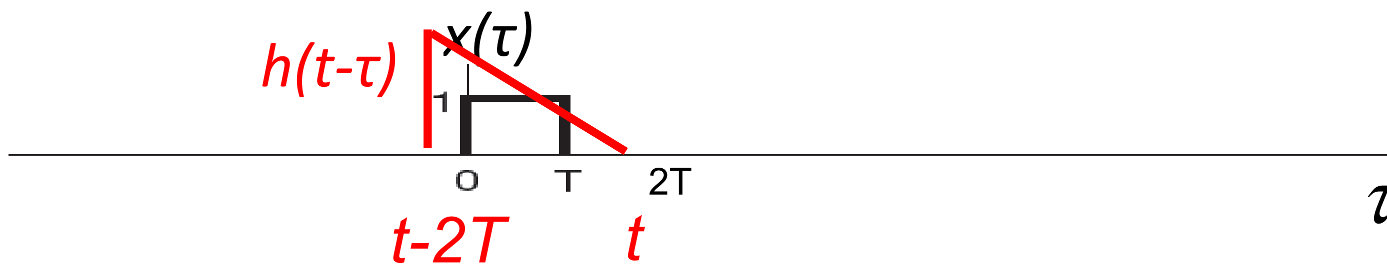
$$y(t) = \int_0^t (t-\tau)d\tau = \left(t\tau - \frac{1}{2}\tau^2 \right)\Bigg|_0^t \Rightarrow$$

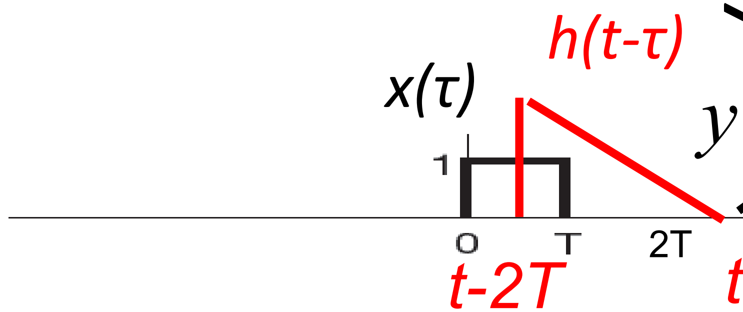
$$y(t) = \frac{t^2}{2}$$

Para T< t ≤2T

$$y(t) = \int_0^T x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

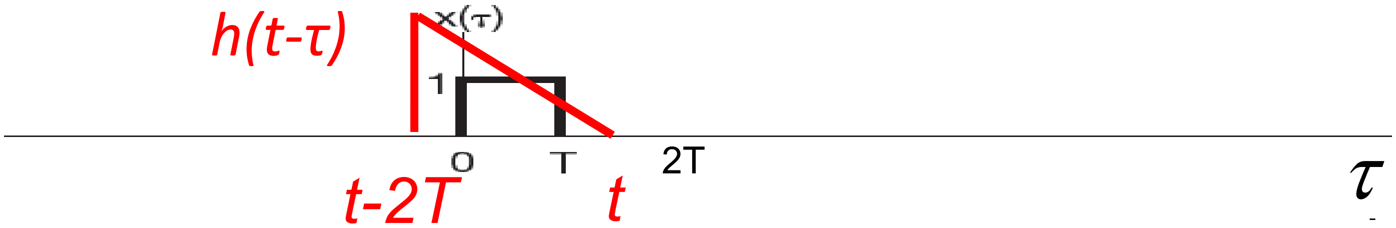






$$\cancel{y(t) = \int_0^T x(\tau)h(t-\tau)d\tau}$$

Para T< t ≤ 2T



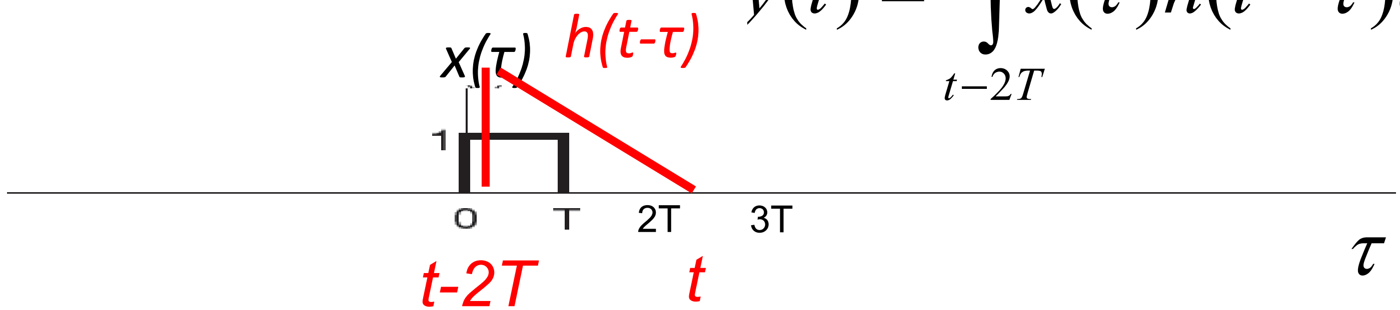
$$y(t) = \int_0^T x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

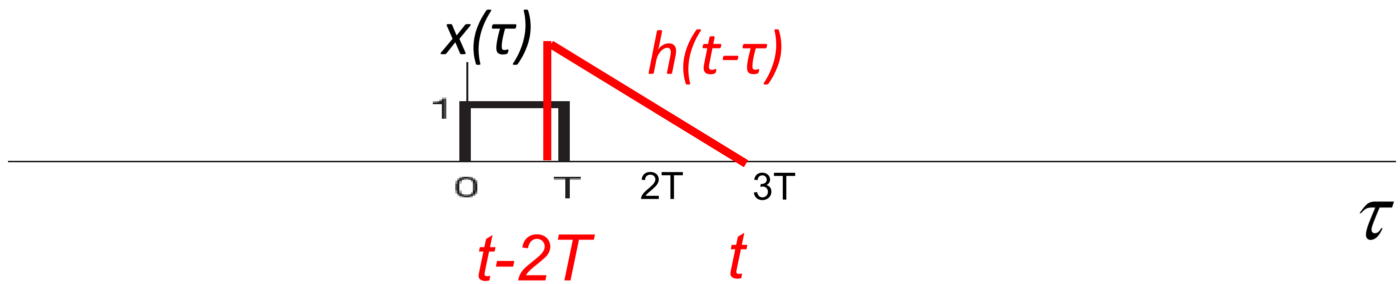
$$y(t) = \int_0^T (t-\tau)d\tau = \left(t\tau - \frac{1}{2}\tau^2 \right)\Bigg|_0^T \Rightarrow$$

$$y(t) = Tt - \frac{T^2}{2}$$

Para 2T< t ≤3T

$$y(t)=\int_{t-2T}^{T}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

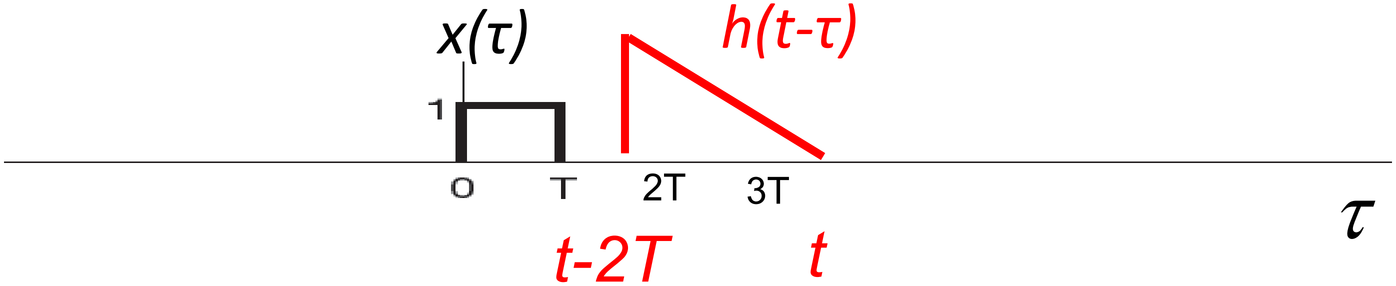




$$y(t)=\int_{t-2T}^{T}(t-\tau)d\tau=\left.\left(t\tau-\frac{1}{2}\tau^{2}\right)\right|_{t-2T}^{T}\Rightarrow$$

$$y(t)=-\frac{1}{2}t^{2}+Tt+\frac{3}{2}T^{2}$$

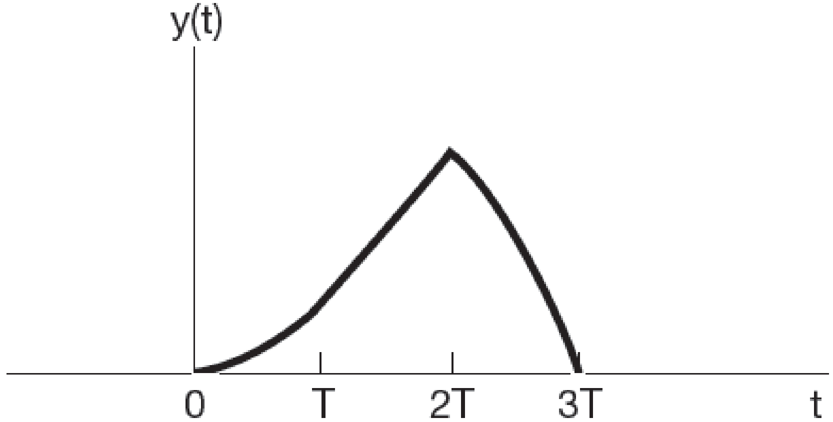
Para t > 3T



$$y(t) = 0$$

$$x(t)=\begin{cases}1, 0<t<T\\ 0, \text{caso contrário}\end{cases} \qquad h(t)=\begin{cases}t, 0<t<2T\\ 0, \text{caso contrário}\end{cases}$$

$$y(t)=\begin{cases}0, \mathrm{t}\le 0\\ \frac{1}{2}t^2, 0<t\le T\\ Tt-\frac{1}{2}T^2, \mathrm{T}<\mathrm{t}\le 2\mathrm{T}\\ -\frac{1}{2}t^2+Tt+\frac{3}{2}T^2, 2\mathrm{T}<t\le 3T\\ 0, \mathrm{t}>3\mathrm{T}\end{cases}$$



Exercício

- Calcule a convolução dos sinais a seguir:

$$x(t) = e^{2t}u(-t)$$

$$h(t) = u(t-3)$$

PROPRIEDADES DA INTEGRAL DE CONVOLUÇÃO

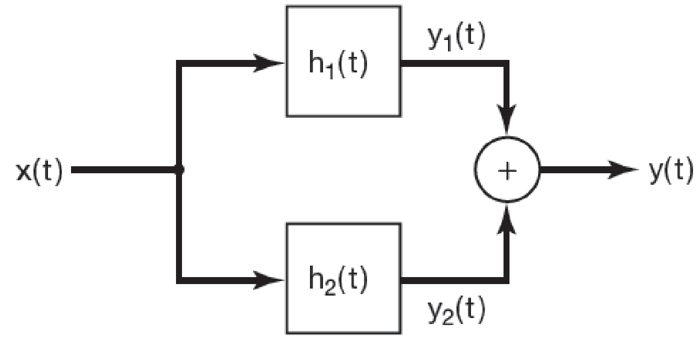
1. Propriedade comutativa

$$\boxed{x(t) * h(t) = h(t) * x(t)}$$

2. Propriedade distributiva

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] \\ y[n] &= x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \end{aligned}}$$

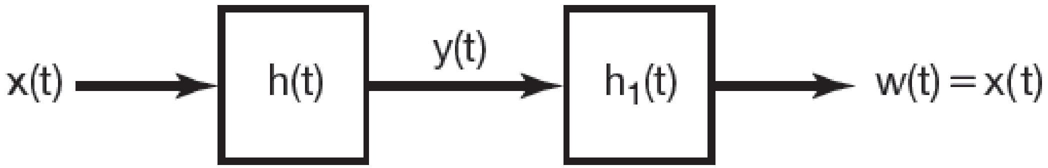
(a)



PROPRIEDADES DA INTEGRAL DE CONVOLUÇÃO

3. Propriedade associativa

$$y(t) = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)$$
$$y(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$$



Propriedades dos sistemas LTI

- Sistema sem memória

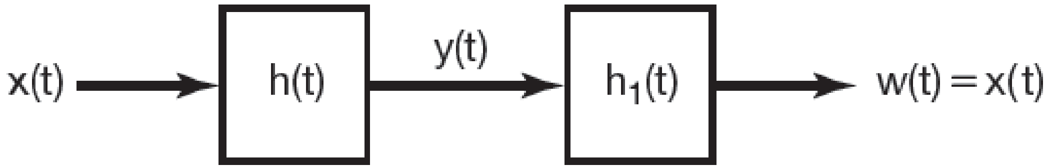
$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$h(\tau) = 0, \tau \neq 0$$

Propriedades dos sistemas LTI

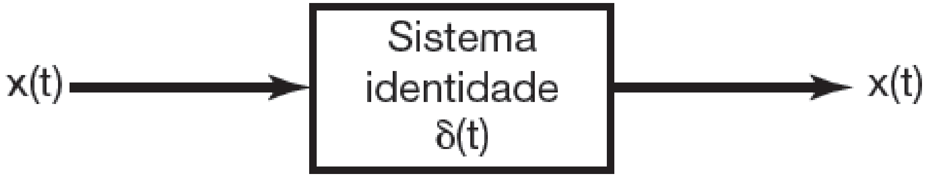
- Sistema inversível



$$w(t) = x(t) = y(t) * h_1(t) = [x(t) * h(t)] * h_1(t)$$

$$w(t) = x(t) * [h(t) * h_1(t)]$$

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$



PROPRIEDADES DOS SISTEMAS LTI

- Sistema causal

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

$$\boxed{h(t) = 0, t < 0}$$

PROPRIEDADES DOS SISTEMAS LTI

- Sistema estável

$$\left|y(t)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t)h[t-\tau]d\tau\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(t)x[t-\tau]d\tau\right|$$

$$y(t) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|h(t)\right|\left|x[t-\tau]\right|d\tau$$

$$y(t) \leq B\int_{-\infty}^{\infty} \left|h(t)\right|d\tau$$

$$\boxed{\int_{\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau < \infty}$$

O sistema é estável se somente se sua reposta ao impulso for absolutamente integrável