Universidade Federal da Campina Grande
Departamento de Engenharia Elétrica
Álgebra Linear
Prof. Edmar Candeia Gurjão
3a lista de Exercícios
Data: 17/07/2017

Problema 1 *Seja* $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ *definida por* $T(A) = A - A^T$.

a) *Mostre que essa transformação é linear.*

b) *Encontre uma base para o Núcleo de* T.

c) *Ensontre uma base para a imagem de* T.

d) *Verifique o teorema fundamental da Álgebra.*

Problema 2 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $T(x, y) = (x + y, y, y - x)$ *e* $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $S(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z, -x - y - z)$, *encontre a matriz da transformação* $S \circ T$.

Problema 3 *Encontre a matriz de transformação de cada uma das seguintes transformações* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *, não é permitido usar a base canônica.*

1. $T(x, y) = (2x - 3y, x + y)$
2. $T(x, y) = (5x + y, 3x - 2y)$

Problema 4 *Determine se cada uma das transformações a seguir é linear:*

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $T(x, y, z) = (x, y + 2, z)$.

b) *A transformação* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $F(1, 0) = (2, -1, 0)$ *e* $F(0, 1) = (0, 0, 1)$.

Problema 5 *Determine o núcleo e a imagem das seguintes transformações:*

a) $T(x, y) = (x + y, y)$

b) $F : P_2 \to P_3$, $F[p(x)] = xp(x)$.

Problema 6 *Determine se as transformações abaixo são isomorfismos*

a) $T(x, y) = (2x + y, 3x + 2y)$

b) $F : P_2 \to \mathbb{R}^3$, $T(at^2 + bt + c) = (a, a + b, b - c)$.

Problema 7 *Seja* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *um transformação linear com a propriedades que* $T(T(\mathbf{x})) = T(x)$ *para todo vetor* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

a) *Determina a imagem dessa transformada;*

b) Se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$*, o que é* $T(\mathbf{x} - T(\mathbf{x}))$*?*

Problema 8 *Para a transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$*, dada por*

$$T(x, y) = (3x + 2y, -x + 3y, x + y)$$

a) Determine o núcleo, a imagem e as suas dimensões;

b) Essa transformação é injetora? Justifique sua resposta.

c) Essa transformação é sobrejetora? Justifique sua resposta.

Problema 9 *Determine se as transformações abaixo são lineares:*

a) $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, dada por* $S(x, y) = (1 - xy, x + y)$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$*, sendo* $T(a, b) = 2a + ax + bx^2$*.*

Problema 10 *Determine as matrizes das seguintes transformações*

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, sendo* $T(x, y, z) = (2x - y, 0, y + z)$*.*

b) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, sendo* $T(x, y, z) = (0, 0, y)$

Problema 11 *Determine se cada uma das transformações abaixo é linear, e caso seja determine seu núcleo e imagem.*

a) $T : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$*, sendo* $T(a, b) = 2a + ax + bx^2$*.*

b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, sendo* $F(x, y) = (x^2 + y^2, x)$*.*

Solução:

a) Sendo $\mathbf{u} = (a, b)$ e $\mathbf{v} = (c, d)$, temos $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a + c, b + d)$ e $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 2(a + c) + (a + c)x + (d + b)x^2 = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$, e $T(k\mathbf{u}) = k2a + kax + kbx^2 = kT(bfu$. Logo a transformação é linear. O núcleo é dado por $2a + 2ax + bx^2 = 0$, logo $a = 0$ e $b = 0$, e assim $Ker(T) = (0, 0)$. A imagem é dada por $Im(T) = [1 + x, x^2]$.

b) $F(a, b) + F(c, d) \neq F(a + c, b + d)$, logo a transformação não é linear.

Problema 12 *Dada a transformação* $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ *definida por* $T(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a - b & a + c \\ b - c & a \end{bmatrix}$ *determine bases para o núcleo, imagem e verifique o teorema das dimensões.*

Problema 13 *A transformação Linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *dada por* $F(x, y, z) = (x, x - y, y - z, z)$ *é um isomorfismo?*

Problema 14 *Encontre o mapeamento linear* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *cuja imagem é gerada por* $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6)\}$*.*

Problema 15 *Determine se cada uma as seguintes transformações é linear.*

1. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $F(x, y) = (2x - y, x)$.
2. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $F(x, y, z) = (z, x + y)$.
3. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $F(x, y) = (x^2, y^2)$.
4. $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $F(x) = (x, 1)$.

Problema 16 *Para cada uma das seguintes mapeamentos lineares encontre uma base da sua imagem* U *e do seu núcleo* V.

1. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $F(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$.
2. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $F(x, y) = (x + y, x + y)$.
3. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $F(x, y, z) = (x + y, y + z)$.

Problema 17 *Encontre o mapeamento linear* $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *cujo núcleo é gerado por* $\{(1, 2, 3, 4), (0, 1, 1, 1)\}$.

Solução:

Já temos dois vetores que conhecemos o resultado da transformação $F(1, 2, 3, 4) = (0, 0, 0)$ e $F(0, 1, 1, 1) = (0, 0, 0)$. Agora precisa de mais dois vetores que saiba o resultado da transformação e formem um base com $(1, 2, 3, 4)$ e $(0, 1, 1, 1)$, por exemplo $F(1, 0, 0, 0) = (1, 2, 3)$ e $F(0, 1, 0, 0) = (3, 2, 1)$, com isso pode escrever

$$(x, y, z, w) = a(1, 2, 3, 4) + b(0, 1, 1, 1) + c(1, 0, 0, 0) + d(0, 1, 0, 0),$$

resolver o sistema, obtemos $a = \frac{-z+2w}{5}$, $b = \frac{-3w-4z}{5}$, $c = \frac{5x+z+2w}{5}$ e $d = \frac{5y+6z-w}{5}$, e sabendo que

$$(x, y, z, w) = \frac{-z + 2w}{5}(1, 2, 3, 4)+\frac{-3w - 4z}{5}(0, 1, 1, 1)+\frac{5x + z + 2w}{5}(1, 0, 0, 0)+\frac{5y + 6z - w}{5}(0, 1, 0, 0),$$

aplicando a transformação

$$F(x, y, z, w) = \frac{-z + 2w}{5}F(1, 2, 3, 4)+\frac{-3w - 4z}{5}F(0, 1, 1, 1)+\frac{5x + z + 2w}{5}F(1, 0, 0, 0)+\frac{5y + 6z - w}{5}F(0, 1,$$

obtemos

$$F(x, y, z, w) = \frac{-z + 2w}{5}(0, 0, 0)+\frac{-3w - 4z}{5}(0, 0, 0)+\frac{5x + z + 2w}{5}(3, 2, 1)+\frac{5y + 6z - w}{5}(1, 2, 3),$$

e agrupando

$$F(x, y, z, w) = (\frac{20x + 9z + 5w}{5}, \frac{10x + 10y + 14z + 2w}{5}, \frac{20x + 19z - w}{5}).$$

Problema 18 *Encontre* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$T(1, 1, 1) = 3, \quad T(0, 1, -2) = 1 \quad e \quad T(0, 0, 1) = -2.$$

Problema 19 *Seja a transformação linear* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $F(1,0) = (2,1)$ *e* $F(0,1) = (1,4)$

1. *Determine* $F(2,4)$*;*

2. *Determinar* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $F(x,y) = (2,3)$.

3. *Mostrar que* F *é injetora e sobrejetora.*

Problema 20 *Determinar uma transformação linear* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *cuja imagem é gerada por* $\{(2,1,1),(1,-1,-2)\}$.

Problema 21 *Considere os operadores lineares* F *e* G *do* $\mathbb{R}^2$ *dados por* $F(x,y)+(x,x-y)$ *e* $G(x,y) = (x+y, 2x)$. *Determine a matriz da transformação composta* $F \circ G$*, em relação à base canônica.*

Problema 22 *Seja* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $F(x,y,z) = (x+z, y-2z)$. *Determinar a matriz* $[F]_C^B$ *sendo* $B = \{(1,2,1),(0,1,1),(0,3,-1)\}$ *e* $C = \{(1,5),(2,-1)\}$.

Problema 23 *Mostrar que cada uma das transformações lineares abaixo* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *a seguir é inversível e determinar a transformação inversa.*

1. $F(x,y,z) = (x-3y-2z, y-4z, z)$

2. $F(x,y,z) = (x, x-y, 2x+y-z)$.

Problema 24 *Sejam* $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definidos por* $F(x,y) = (0,x)$ *e* $G(x,y) = (x,0)$ *determinar as matrizes das transformações considerando a base canônica:*

1. $F \circ G$*;*

2. $G \circ F$.

Problema 25 *Sejam* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *e* $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definidas por* $F(x,y) = (0,x,x-y)$ *e* $G(x,y,z) = (x-y, x+2y+3z)$. *Determinar a matriz de* $F \circ G \circ F$ *considerando a base canônica.*

Problema 26 *Para cada um dos itens abaixo, determine se a transformação é linear.*

1. $M : P_2 \to P_2$*, definida por* $M(at^2+bt+c) = at^2+(b-c)t+(a-b)$.

2. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$*, definida por* $F(x,y,z) = (|x|, 0)$.

3. $G : M_2 \to M_2$*, definida por* $G\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c-d \\ c+d & 2a \end{bmatrix}$.

4. $H : M_2 \to \mathbb{R}$*, definida por* $H\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a^2+b^2$.

Problema 27 *Seja* $L : P_1 \to P_1$ *tal que:* $L(t+1) = t-1$ *e* $L(t-1) = 2t+1$. *Determine a transformação e sua matriz em relação à base* $\{t+1, t-1\}$.

Problema 28 *Seja o mapeamento linear* $F : M_2 \to M_2$ *definido por* $F(A) = MA$ *sendo* $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$. *Determine uma base e a dimensão núcleo e da imagem de* F. *Considere a base que quiser.*

Problema 29 *Sejam as transformações* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ *e* $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ *definidas por* $F(x, y) = (3x + 4y, 5x - 2y, x + 7y, 4x)$ *e* $G(x, y, s, t) = 2x + 3y - 7s - t$. *Considerando as bases canônicas, responda:*

1. *Mostre qual das transformações é inversível.*

2. *A transformação* $G \circ F$ *é inversível? Justifique sua resposta.*

Problema 30 *A transformação* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ *definida por* $F(x, y) = (3x + 4y, 5x - 2y, x + 7y, 4x)$ *é inversível? Justifique sua resposta.*

Problema 31 *Para cada um dos operadores abaixo determine o núcleo a imagem.*

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *definida por* $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 - x_2 + 2x_3)$

b) $T : P_2 \to \mathbb{R}$ *sendo* $T(p(x)) = p(1)$

Problema 32 *A transformação* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $T(x, y, z) = (3x + y, -2x - 4y + 3z, 5x + 4y - 2z)$, *com relação às bases canônicas, é um isomorfismo? Justifique sua resposta.*

Problema 33 *Determinar uma transformação linear o* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *com relação as bases* $B = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ *e* C *a base canônica, e cujo núcleo tenha dimensão 1.*

Problema 34 *Seja* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *um mapeamento linear definido por* $F(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$.

a) *Encontre a matriz de* F *em relação as seguintes bases do* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^2$*:* $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ *e* $\{(1, 3), (1, 4)\}$.

b) *Verifique que, para qualquer vetor* $v \in \mathbb{R}^3$, $[F]^f_g [v]_f = [F(v)]_g$

Problema 35 *Seja* $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *uma transformação linear dada por*

$$F(x, y, s, t) = (x - y + s + t, x + 2s - t, x + y + 3s - 3t)$$

determine uma base e a dimensão para: a) a imagem de F, *b) o núcleo de* F.

Problema 36 *Determine se cada uma das transformações a seguir é linear, e caso seja encontre uma base para o núcleo e uma base para a imagem da transformação.*

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x, x, xy)$.

b) $L : P_2 \to P_1$, $L(at^2 + bt + c) = (a + 2b)t + (b + c)$.

Problema 37 *A transformação* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y,z) = (x+y, x-z, y)$, *é um isomorfismo? Caso seja, determine sua inversa.*

Problema 38 *Sejas as T.L.* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *com* $T(1,-1) = (1,1,2)$ *e* $T(2,0) = (2,-1,1)$ *e* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(1,1,1) = 3$, *F(0, 1, 2) = 1*, $F(0,0,1) = 2$. *Determine as matrizes dessas transformações, e a matriz da transformação combinada entre F e G que seja possível*

Problema 39 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $[T]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *sendo* $A = \{(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1)\}$ *e* $B = \{(-1,0),(0,-1)\}$, *bases do* $\mathbb{R}^3$ *e do* $\mathbb{R}^2$, *respectivamente.*

a) *Encontre a expressão de* $T(x,y,z)$.

b) *Determine o núcleo de* T.

c) *Determine a imagem de* T.

d) T *é injetora? É sobrejetora?*

Problema 40 *Seja* $T : V \to W$ *linear. Prove que:*

a) $T(0) = 0$;

b) $Nuc(T)$ *é subespaço vetorial;*

c) $Im(T)$ *é subespaço vetorial.*

d) *se* T *é injetiva,* T *leva conjunto LI em conjunto LI.*

e) *se* T *possui inversa,* T *leva base em base.*

Problema 41 *Considere as bases do* $\mathbb{R}^2$: $\beta_1 = \{(-1,1),(1,1)\}$ *e* $\beta_2 = \{(0,2),(1,0)\}$. *Se* $[v]_{\beta_1} = (2,3)$ *determine* $[v]_{\beta_2}$.

Problema 42 *Seja uma transformação linear* $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$, *sob quais condições para os autovalores e autovetores essa matriz é diagonalizável?*

Edmar

Problema 43 *Seja a transformação* $T : P_3 \to P_4$, *dada por* $T[p(x)] = (x-1)p(x) + \Delta$, *sendo* Δ *um termo a sua escolha.*

a) *Escolha dois valores para* Δ *(diferentes de zero e pode ser um polinômio), um que a transformação seja linear e outro que ela não seja linear. Justifique sua resposta.*

b) *Utilizando o valor que você escolheu para que a transformação seja linear, determine se* T *é um isomorfismo.*

Problema 44 *Encontre os autovalores e autovetores de a)* $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, *b)* $T(x,y) = (3/2x, -2y)$; *usando a base* $\{(1,2),(0,3)\}$

Modificado do problema Internet http://math.bard.edu/ mbelk/math601/LinearAlgebraSolutions.pdf Questão 10

Problema 45 *A matriz abaixo é digonalizável? Justifique sua resposta.* $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Problema 46 *A matriz abaixo é diagonalizável ? Em caso afirmativo, qual a matriz diagonal.* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Problema 47 *Determine os autovalores e autovetores de:*

a) $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

b) $T(x, y, z) = (-x - 2y + 2z, y, z)$

Problema 48 *Seja* A *uma matriz* 3×3 *tal que* $A^2 = 4A - 4I$.

a) Quais são os possíveis autovalores de A*?*

b) Dê um exemplo de uma matriz 3×3, $A \neq 2I$ *que satisfaz* $A^2 = 4A - 2I$.

Problema 49 *Para cada uma das seguintes transformações* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *encontre todos os autovalores e uma base para cada um dos autoespaços. a)* $T(x, y) = (3x + 3y, x + 5y)$ *b)* $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(x - 1)^2$ $T(x, y) = (y, x)$ *c)* $T(x, y) = (y, -x)$

Problema 50 *Determine os autovalores e autoespaços da seguintes transformações:*

a) $T(x, y) = (x + y, y)$;

b) $T(x, y) = (3/2x, 2y)$;

c) $T(x, y) = (3/2x, -2y)$;

d) $T(x; y) = (x/2, 2y)$.

Problema 51 *Dadas as matrizes a seguir, determine seus autovalores e uma base para cada autovalores associados.*

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

Problema 52 *Determine os autovalores e autovetores das matrizes a)* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & -5 \\ 8 & 0 & 9 \end{bmatrix}$,

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Solução:

a) $p(\lambda) = (1-\lambda)(4-\lambda)(9-\lambda)$,

para $\lambda = 1$ $v = r(-1,-1,1)$. Para $\lambda = 4$ $v = s(0,1,0)$ e para $\lambda = 9$ $v = t(0,-1,0)$.

b) $p(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda+2)^2$. Para $\lambda = 1$, $v = x(1,-1,1)$, para $\lambda = -2$ $v = x(-1,1,0) + y(-1,0,1)$.

Problema 53 *Suponha que* $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *é uma autovetor da matriz A que corresponder ao autovalor 3, e que* $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *é outro autovetor de A correspondente ao autovalor -2. Calcule* $A^2 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solução:

$(4,3) = 2(1,1) + (2,1)$. $A^2(4,3) = A^2[(2(1,1) + 1(1,2) = 2A^2(1,1) + A^(2,1) = 2.9(1,1) + 4(2,1) = (26,22)$

Problema 54 *Justifique as afirmativas abaixo:*

a) A transformação aplicada ao seu autovetor não muda sua direção.

b) Os autovetores associados a um autovalor formam um subespaço vetorial.

Problema 55 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por*

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2$$

atribua valores diferentes de zero para a_0, a_1 e a_2 e determine os autovalores e autovetores da matriz dessa transformação com relação à base $B = \{1, x, x^2\}$.

Problema 56 *Determine os autovalores e autovetores associados as matrizes das transformações abaixo:*

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(3,1) = (2,-4)$ e $T(1,1) = (0,2)$,

b) $T : P_2 \to P_2$ sendo $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$

c) $F : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ sendo $F(A) = CA$, com $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

Problema 57 *Para cada uma das matrizes abaixo, determine os autovalores e autovetores associados: a)* $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *b)* $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *c)* $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Problema 58 *Indique quais das matrizes abaixo são diagonalizáveis. E para as que forem diagonalizáveis, mostre a matriz diagonal. a)* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ *b) c)* $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Problema 59 *Suponha que v é um autovetor das transformações S e T. Mostre que v é um autovetor da transformação $aS + bT$, sendo a e b escalares.*

Problema 60 *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} a & a \\ c & d \end{bmatrix}$$

encontre as condições, em termos de a, c e d para que essa matriz seja diagonalizável.

Problema 61 *Sejam a, b e c escalares e* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$. *Mostre que os polinômios característicos e minimal são iguais.*

Problema 62 *Indique quais das matrizes abaixo são diagonalizáveis. E para as que forem diagonalizáveis, mostre a matriz diagonal. a)* $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ *b)* $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Problema 63 *Verifique se cada uma das matrizes abaixo é diagonalizável, e caso seja mostre a matriz diagonal*

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Problema 64 *Seja que $A_{n\times n}$ com autovalor λ e autovetor v, responda:*

a) Se A é inversível, v é um autovalor de A^{-1}?

b) $3v$ é um autovalor de A?

Problema 65 *Determine se as matrizes abaixo são diagonalizáveis. a)* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Problema 66 *Para cada uma das matrizes abaixo, determine os autovalores e autovetores associados: a)* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ *b)* $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

Problema 67 *Para cada uma das matrizes abaixo, encontre todos os autovetores e uma base para o espaço. a)* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ *b)* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ *c)* $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Problema 68 *Para cada uma das seguintes transformações* $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *encontre todos os autovalores e uma base para cada um dos autoespaços. a)* $T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$ *b)* $T(x, y, z) = (x + y, y + z, -2y - z)$ *c)* $T(x, y, z) = (x - y, 2x + 3y + 2z, x + y + 2z)$

Problema 69 *Suponha que v é um autovetor das transformações S e T. Mostre que v é um autovetor da transformação $aS + bT$, sendo a e b escalares.*

Problema 70 *Quais das matrizes abaixo são diagonalizáveis? a)* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Problema 71 *Mostre que a matriz* $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ *não é diagonalizável para qualquer λ escalar. Calcule J^2, J^3 e J^4. Qual a fórmula para determinar J^k, sendo k um inteiro positivo?*

Problema 72 *Seja T o operador linear sobre $\mathbb{R}^4$ representado na base canônica pela matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix}$$

Em que condições sobre a, b e c, T é diagonalizável?

Problema 73 *Explique como as seguintes afirmativas estão relacionadas:*

a) A matriz de uma transformação $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ tem N autovalores distintos.

b) Os autovetores associados ao autovalores dessa transformação formam uma base para o autoespaço.

c) A base do autoespaço é uma base para o espaço $\mathbb{R}^N$.

Problema 74 *Explique como as seguintes afirmativas estão relacionadas:*

a) A matriz de uma transformação $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ não tem N autovalores distintos.

b) A quantidade de autovetores distintos associados aos autovalores é N.

c) A base do autoespaço é uma base para o espaço $\mathbb{R}^N$.

Problema 75 *Seja* λ *um autovalor de* $\mathbf{A}$ *com autovetor associado* $\mathbf{x}$*, mostre que* λ^k *é um autovalor de* $A^k = A \cdot A \cdot A \cdot ...A$ *com autovetor associado* $\mathbf{x}$*, sendo* k *um inteiro positivo.*

Problema 76 *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

encontre as condições, em termos de a*,* b*,* c *e* d *para que essa matriz seja diagonalizável.*

Problema 77 *Sejam* A *e* B *matrizes* $N \times N$ *tais que* $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ *e* $B\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}$*. Mostre que:*

a) $(A + B)\mathbf{x} = (\lambda + \mu)\mathbf{x}$

b) $(AB)\mathbf{x} = (\lambda\mu)\mathbf{x}$

Problema 78 *Verifique que a matriz* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *é diagonalizável, e determine sua matriz diagonal.*